Goniometria e Trigonometria

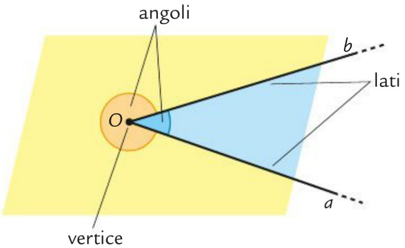
prof. Andres Manzini

Università degli studi di Modena e Reggio Emilia
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria
Corso MOOC "Iscriversi a Ingegneria Reggio Emilia"

Introduzione

La **goniometria** è la parte della matematica che studia gli angoli, mentre la **trigonometria** è la parte della matematica che studia i triangoli.

Occorre quindi ricordare come viene definito un angolo, ovvero come *la parte di piano delimitata da due semirette aventi origine in comune*.

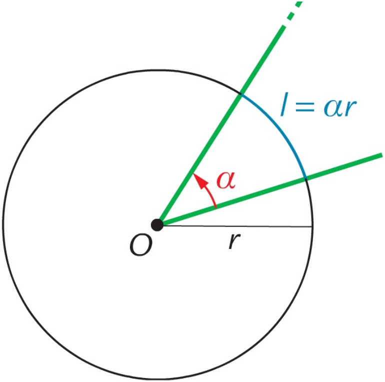


Se le due semirette sono opposte allora l'angolo si definisce **piatto**. La metà di un angolo piatto è detto angolo **retto**.

Misura di un angolo

Gli angoli possono essere misurati

- in **gradi** (α°), dove 1° è definito come la novantesima parte di un angolo retto.
- in **radianti** (α rad, o semplicemente α), dove 1 rad è definito mediante una circonferenza come l'angolo al centro che sottende un arco pari al raggio.



Quindi $\alpha = 1$ rad se $l = r$.
In generale un angolo in radianti potrà essere espresso come

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Misura di un angolo

È sempre possibile passare da un'unità di misura all'altra mediante una proporzione.
Se si considera come arco particolare la misura di una semicirconferenza, allora si ha che

$$l = \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r.$$

Quindi la misura in radianti di un angolo piatto è

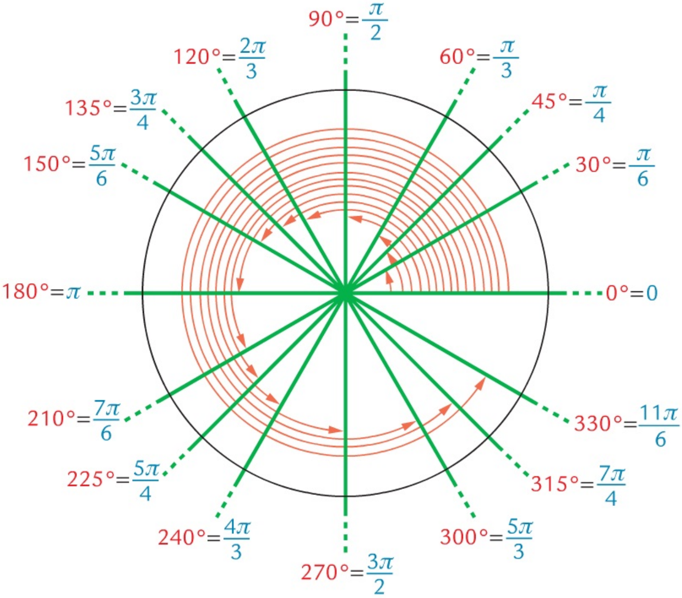
$$\alpha = \frac{\pi r}{r} = \pi.$$

Ne consegue che

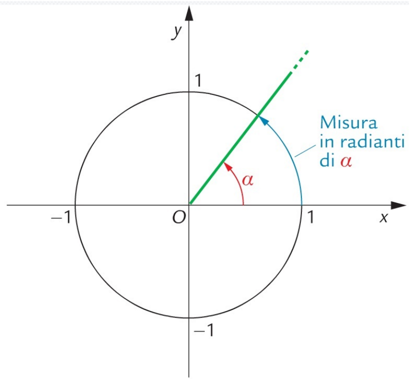
- un angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$ rad, mentre un angolo giro 2π rad.
- per poter passare da un'unità di misura all'altra occorre che sia verificata la proporzione

$$\pi : 180^\circ = \alpha^{[rad]} : \alpha^{[\circ]}$$

Angoli in radianti

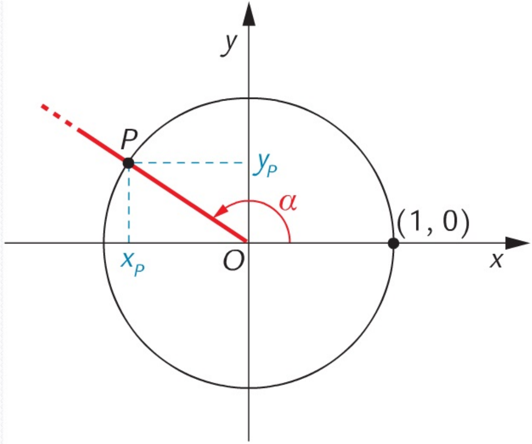


Circonferenza goniometrica



Per poter introdurre in modo agevole le funzioni goniometriche, è utile riferirsi ad un sistema di assi cartesiani e ad una circonferenza centrata nell'origine degli assi e avente raggio unitario. Tale circonferenza è detta circonferenza goniometrica. Essa stabilisce anche la convenzione per gli angoli orientati, che saranno considerati positivi se individuati a partire dal semiasse positivo delle ascisse in senso antiorario.

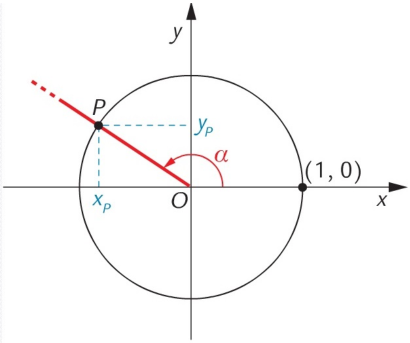
Preso un angolo orientato α esso individuerà un punto P sulla circonferenza goniometrica. In base a questo punto vengono definite le funzioni goniometriche **seno**, **coseno** e **tangente** dell'angolo α.



seno di $\alpha = y_P$

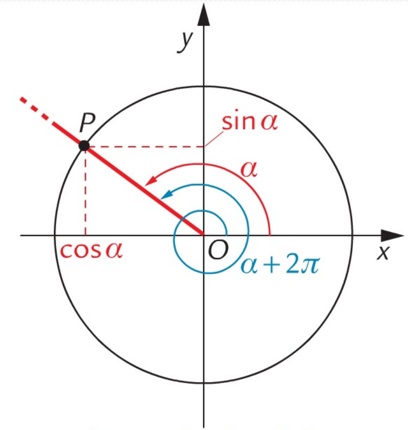
coseno di $\alpha = x_P$

tangente di $\alpha = \dfrac{y_P}{x_P}$



- $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ e $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.
- Vale la relazione
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
- I valori di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ sono positivi, negativi o nulli a secondo del quadrante in cui è posto il punto $P = (\cos\alpha; \sin\alpha)$.

Proprietà delle funzioni goniometriche

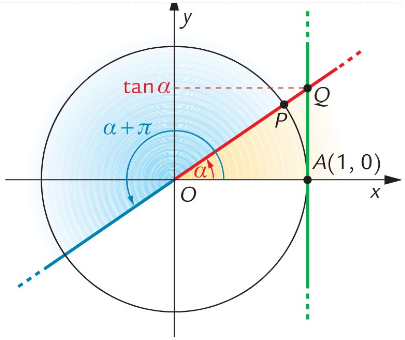


Un punto P individua infiniti angoli, tutti ottenibili da un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$ sommando un numero intero di angoli giri. In generale si può scrivere

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$$

con $k \in \mathbb{Z}$.
Seno e coseno sono quindi funzioni **periodiche**, con periodo 2π.



$\tan\alpha = \tan(\alpha+\pi)$

Un altro modo per definire la tangente di un angolo è

$$\tan\alpha = y_Q$$

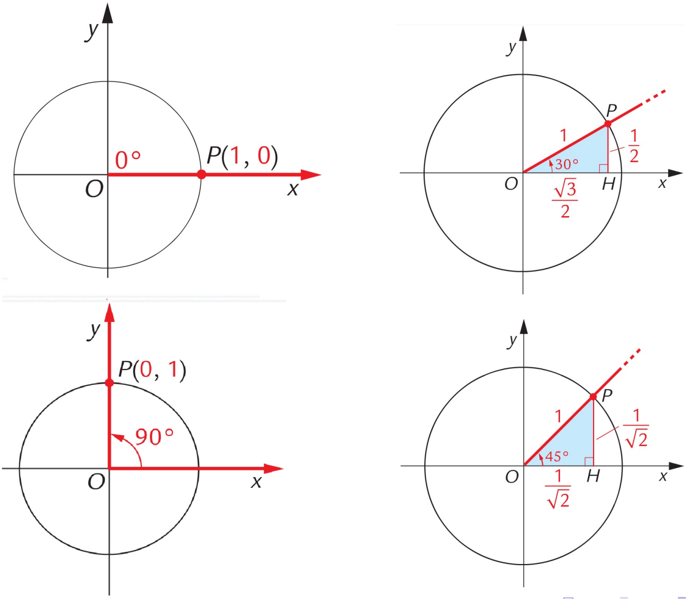
da cui derivano le seguenti proprietà:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\tan\alpha = \tan(\alpha + k\pi)$$

con $k \in \mathbb{Z}$.
La tangente è una funzione **periodica**, con periodo π.

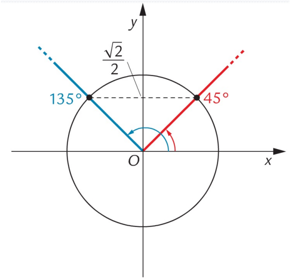
Alcuni angoli particolari

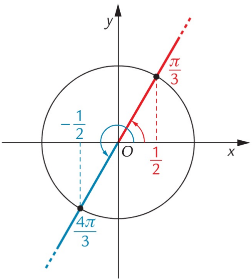


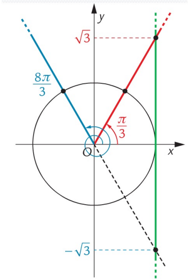
Esempi

Esercizi

1. Calcolare $\sin(135°)$.
2. Calcolare $\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)$.
3. Calcolare $\tan\left(\frac{8}{3}\pi\right)$.







Esempi

Esercizio

Dato un angolo $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, si sa che $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Calcolare $\cos \alpha$.

- Se $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, allora il punto P sulla circonferenza goniometrica è posto nel secondo quadrante, dove

$$\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$$

Esempi

Esercizio

Dato un angolo $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, si sa che $\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$. Calcolare $\cos\alpha$.

- Se $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, allora il punto P sulla circonferenza goniometrica è posto nel secondo quadrante, dove

$$\sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0$$

- Dalla relazione fondamentale $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ si ha che

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Esempi

Esercizio

Dato un angolo $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, si sa che $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Calcolare $\cos\alpha$.

- Se $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, allora il punto P sulla circonferenza goniometrica è posto nel secondo quadrante, dove

$$\sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0$$

- Dalla relazione fondamentale $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ si ha che

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

- Tenuto conto dei segni, il valore accettabile è

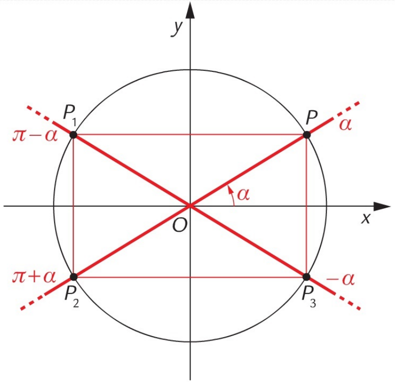
$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Angoli Associati

Dato un angolo α, si chiamano angoli associati gli angoli

$$-\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}+\alpha, \pi-\alpha, \pi+\alpha, \frac{3}{2}\pi-\alpha, \frac{3}{2}\pi+\alpha, 2\pi-\alpha.$$

Le funzioni goniometriche di questi angoli sono legati alle funzioni goniometriche dell'angolo α.

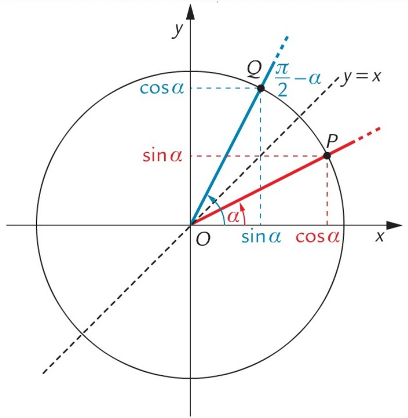


Si ha, ad esempio

$$\sin(\pi-\alpha) = y_{P_1} = y_P = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha) = x_{P_2} = \ldots = -\cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$



Occorre prestare attenzione perché una regola generale non esiste, occorre valutare caso per caso il segno e la funzione goniometrica con cui è in relazione.

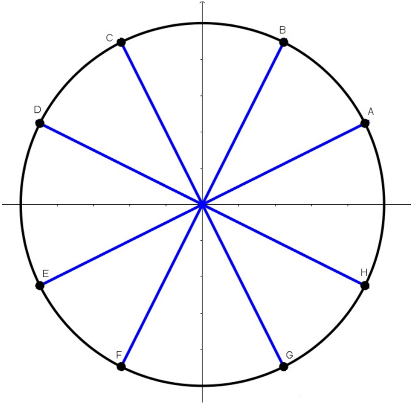
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

Esercizio

Semplificare la seguente espressione

$$\left(1 - \tan\left(\pi - \alpha\right)\tan\left(\pi + \alpha\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(-\alpha\right)\cos\left(\pi + \alpha\right)$$



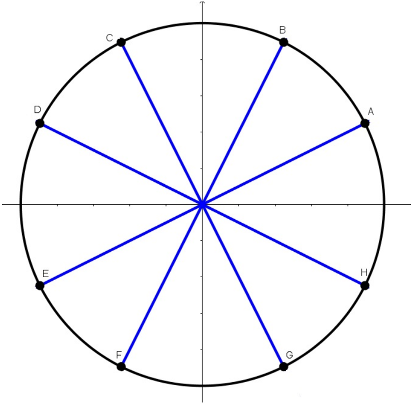
Per le relazioni degli angoli associati si ha che

Esempio

Esercizio

Semplificare la seguente espressione

$$(1 - \tan(\pi - \alpha)\tan(\pi + \alpha))\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\alpha)\cos(\pi + \alpha)$$



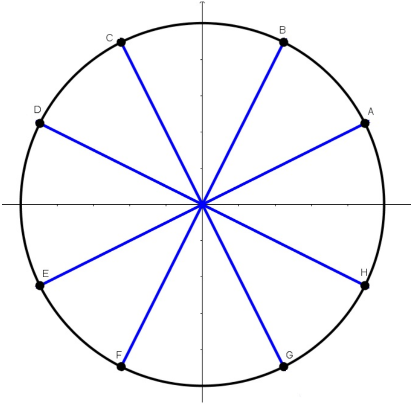
Per le relazioni degli angoli associati si ha che

- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

Esercizio

Semplificare la seguente espressione

$$(1 - \tan(\pi - \alpha)\tan(\pi + \alpha))\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\alpha)\cos(\pi + \alpha)$$



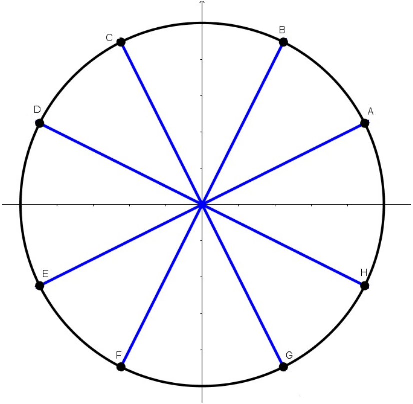
Per le relazioni degli angoli associati si ha che

- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
- $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

Esercizio

Semplificare la seguente espressione

$$\left(1-\tan\left(\pi-\alpha\right)\tan\left(\pi+\alpha\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(-\alpha\right)\cos\left(\pi+\alpha\right)$$



Per le relazioni degli angoli associati si ha che

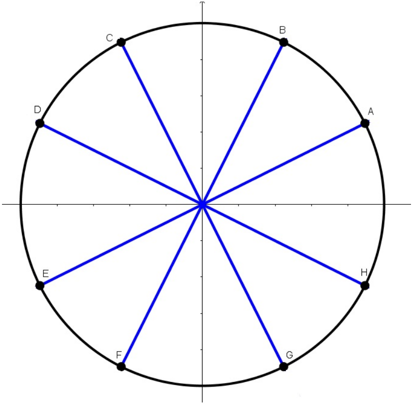
- $\tan\left(\pi-\alpha\right)=-\tan\alpha$
- $\tan\left(\pi+\alpha\right)=\tan\alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

Esempio

Esercizio

Semplificare la seguente espressione

$$\left(1-\tan\left(\pi-\alpha\right)\tan\left(\pi+\alpha\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(-\alpha\right)\cos\left(\pi+\alpha\right)$$



Per le relazioni degli angoli associati si ha che

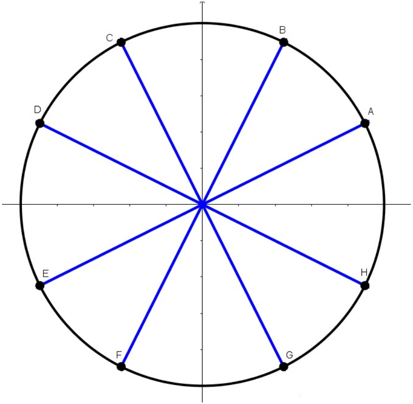
- $\tan\left(\pi-\alpha\right)=-\tan\alpha$
- $\tan\left(\pi+\alpha\right)=\tan\alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
- $\cos\left(-\alpha\right)=\cos\alpha$

Esempio

Esercizio

Semplificare la seguente espressione

$$\left(1-\tan\left(\pi-\alpha\right)\tan\left(\pi+\alpha\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(-\alpha\right)\cos\left(\pi+\alpha\right)$$



Per le relazioni degli angoli associati si ha che

- $\tan\left(\pi-\alpha\right)=-\tan\alpha$
- $\tan\left(\pi+\alpha\right)=\tan\alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
- $\cos\left(-\alpha\right)=\cos\alpha$
- $\cos\left(\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha$

Esempio

Esercizio

Semplificare la seguente espressione

$$(1-\tan(\pi-\alpha)\tan(\pi+\alpha))\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\alpha)\cos(\pi+\alpha)$$

- L'espressione quindi si può riscrivere come

$$(1+\tan^2(\alpha))(-\cos^3(\alpha))$$

Esempio

Esercizio

Semplificare la seguente espressione

$$(1 - \tan(\pi - \alpha)\tan(\pi + \alpha))\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\alpha)\cos(\pi + \alpha)$$

- L'espressione quindi si può riscrivere come
$$(1 + \tan^2(\alpha))(-\cos^3(\alpha))$$
- Ricordando la definizione di tangente di angolo si ha che
$$1 + \tan^2(\alpha) = 1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Esempio

Esercizio

Semplificare la seguente espressione

$$(1 - \tan(\pi - \alpha)\tan(\pi + \alpha))\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\alpha)\cos(\pi + \alpha)$$

- L'espressione quindi si può riscrivere come
$$(1 + \tan^2(\alpha))(-\cos^3(\alpha))$$
- Ricordando la definizione di tangente di angolo si ha che
$$1 + \tan^2(\alpha) = 1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$
- Dalla prima relazione fondamentale della goniometria si giunge alla semplificazione
$$\frac{1}{\cos^2\alpha}(-\cos^3(\alpha)) = -\cos(\alpha)$$

Formule goniometriche

Le formule goniometriche consentono di mettere in relazione operazioni elementari fra angoli e funzioni goniometriche.

Importante!

Le funzioni seno, coseno e tangenti NON sono lineari, quindi in generale

$$\sin(\alpha+\beta) \neq \sin(\alpha) + \sin(\beta)$$

oppure

$$\sin(2\alpha) \neq 2\sin(\alpha)$$

Le principali formule goniometriche riguardano

- somma e sottrazione di angoli
- duplicazione di un angolo
- bisezione di un angolo

Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

Formule goniometriche

Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

- $\sin(75^\circ) = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Formule goniometriche

Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

- $\sin(75^\circ) = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $\tan(15^\circ) = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}$

Nel caso notevole in cui $\alpha = \beta$, allora $\alpha + \beta = 2\alpha$ e si possono dedurre le

Formule di duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Osservazione!
La formula di duplicazione del coseno può essere riscritta utilizzando la relazione fondamentale della goniometria

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \text{ oppure } \cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Formule goniometriche

Riscrivendo le ultime due equazioni in funzione di $\cos^2\alpha$ e $\sin^2\alpha$ si ottiene

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \text{ e } \sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

Osservando che α è la metà di 2α, tramite una semplice sostituzione si possono dedurre le

Formule di bisezione

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Esempio

Esercizio

In un triangolo isoscele gli angoli alla base hanno seno uguale a $\frac{3}{4}$.
Determinare seno, coseno e tangente dell'angolo al vertice e stabilire se il triangolo è acutangolo o ottusangolo.

Esempio

Esercizio

In un triangolo isoscele gli angoli alla base hanno seno uguale a $\frac{3}{4}$. Determinare seno, coseno e tangente dell'angolo al vertice e stabilire se il triangolo è acutangolo o ottusangolo.

- Detti x gli angoli alla base, si ha che $\sin x = \frac{3}{4}$. Sia y l'angolo al vertice, risulta $y = \pi - 2x$, quindi

$$\sin y = \sin(\pi - 2x)$$

Esempio

Esercizio

In un triangolo isoscele gli angoli alla base hanno seno uguale a $\frac{3}{4}$. Determinare seno, coseno e tangente dell'angolo al vertice e stabilire se il triangolo è acutangolo o ottusangolo.

- Detti x gli angoli alla base, si ha che $\sin x = \frac{3}{4}$. Sia y l'angolo al vertice, risulta $y = \pi - 2x$, quindi

$$\sin y = \sin(\pi - 2x)$$

- Per le relazioni degli angoli associati e le formule di duplicazione si ha

$$\sin y = \sin(\pi - 2x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Esempio

Esercizio

In un triangolo isoscele gli angoli alla base hanno seno uguale a $\dfrac{3}{4}$. Determinare seno, coseno e tangente dell'angolo al vertice e stabilire se il triangolo è acutangolo o ottusangolo.

- Detti x gli angoli alla base, si ha che $\sin x = \dfrac{3}{4}$. Sia y l'angolo al vertice, risulta $y = \pi - 2x$, quindi

$$\sin y = \sin(\pi - 2x)$$

- Per le relazioni degli angoli associati e le formule di duplicazione si ha

$$\sin y = \sin(\pi - 2x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

- Essendo gli angoli alla base sicuramente acuti, si ha $\cos x > 0$, per cui $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Esempio

Esercizio

In un triangolo isoscele gli angoli alla base hanno seno uguale a $\dfrac{3}{4}$. Determinare seno, coseno e tangente dell'angolo al vertice e stabilire se il triangolo è acutangolo o ottusangolo.

- Quindi $\sin y = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

Esempio

Esercizio

In un triangolo isoscele gli angoli alla base hanno seno uguale a $\dfrac{3}{4}$. Determinare seno, coseno e tangente dell'angolo al vertice e stabilire se il triangolo è acutangolo o ottusangolo.

- Quindi $\sin y = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$
- Con analoghe considerazioni si può dedurre il coseno dell'angolo come $\cos y = \cos(\pi - 2x) = -\cos 2x = -\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{8}$

Esempio

Esercizio

In un triangolo isoscele gli angoli alla base hanno seno uguale a $\dfrac{3}{4}$. Determinare seno, coseno e tangente dell'angolo al vertice e stabilire se il triangolo è acutangolo o ottusangolo.

- Quindi $\sin y = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$
- Con analoghe considerazioni si può dedurre il coseno dell'angolo come $\cos y = \cos(\pi - 2x) = -\cos 2x =$ $-(\cos^2 x - \sin^2 x) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{8}$
- Dato che anche il coseno è positivo si può concludere che l'angolo y è acuto e quindi il triangolo è acutangolo. Infine si può calcolare il valore della tangente come

$$\tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{8}}{\frac{1}{8}} = 3\sqrt{7}$$

Equazioni goniometriche

Ogni equazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica è detta **equazione goniometrica**. Le equazioni goniometriche possono classificarsi in base

- al numero di funzioni goniometriche presenti
- al numero di angoli presenti
- al grado delle funzioni goniometriche

Esempi:

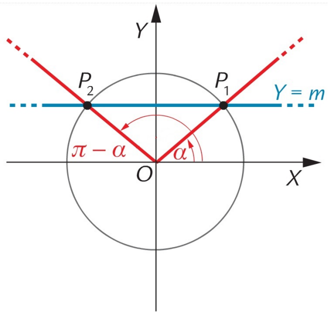
$$\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2} \quad \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin(5x) \quad \tan^2 x-2\tan x-3=0$$

Un'equazione di primo grado con una funzione goniometrica e un angolo è detta equazione goniometrica elementare e può essere ricondotta alla forma

$$\sin(f(x))=m \quad \cos(f(x))=m \quad \tan(f(x))=m, m\in\mathbb{R}$$

Osservazione

È molto importante conoscere il dominio in cui si risolve l'equazione, ovvero i valori dell'angolo ritenuti accettabili. Alcuni domini frequenti sono gli intervalli $[0, 2\pi]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ oppure $\mathbb{R}$.

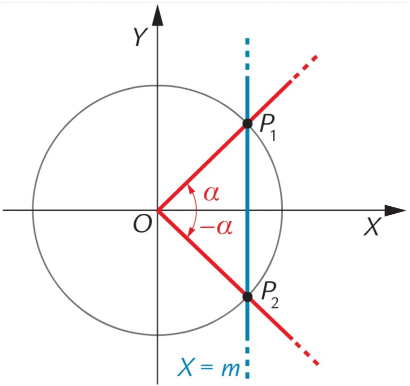


Equazioni elementari

Risolvere $\sin x = m$, con $m \in \mathbb{R}$.

Essendo $\sin\alpha = y_P$ allora l'equazione

- sarà impossibile in $\mathbb{R}$ se $m < -1 \vee m > 1$.
- avrà due soluzioni del tipo α e $\pi - \alpha$ in $[0, 2\pi]$.
- avrà infinite soluzioni in $\mathbb{R}$ del tipo $\alpha + 2k\pi$ e $\pi - \alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

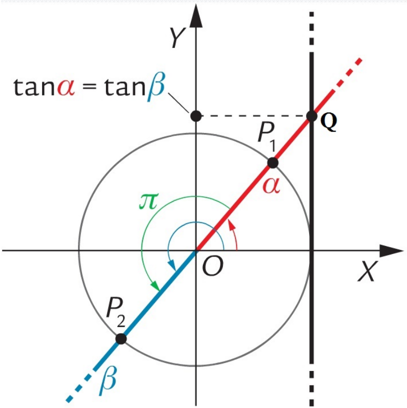


Equazioni elementari

Risolvere $\cos x = m$, con $m \in \mathbb{R}$.

Essendo $\cos \alpha = x_P$ allora l'equazione

- sarà impossibile in $\mathbb{R}$ se $m < -1 \vee m > 1$.
- avrà due soluzioni del tipo $\pm\alpha$ in $[-\pi, \pi]$ *(oppure α e $2\pi - \alpha$ in $[0, 2\pi]$)*.
- avrà infinite soluzioni in $\mathbb{R}$ del tipo $\pm\alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.



Equazioni elementari

Risolvere $\tan x = m$, con $m \in \mathbb{R}$.

Essendo $\tan \alpha = y_Q$ allora l'equazione

- avrà una soluzione α nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, per ogni valore di $m \in \mathbb{R}$.
- avrà infinite soluzioni in $\mathbb{R}$ del tipo $\alpha + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 1

Risolvere $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, con $x \in [0, 2\pi]$.

Risolvere $\sin x = \dfrac{1}{3}$, con $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Equazioni goniometriche

Esempio 1

Risolvere $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, con $x \in [0, 2\pi]$.

Risolvere $\sin x = \dfrac{1}{3}$, con $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

- Essendo $\sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, le uniche due soluzioni dell'equazione sono

$$x = \frac{\pi}{3} \qquad x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

Equazioni goniometriche

Esempio 1

Risolvere $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, con $x \in [0, 2\pi]$.

Risolvere $\sin x = \dfrac{1}{3}$, con $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

- Essendo $\sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, le uniche due soluzioni dell'equazione sono

$$x = \frac{\pi}{3} \qquad x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

- Essendo $\dfrac{1}{3}$ un valore non riconducibile ad un angolo noto, si useranno le funzioni inverse

$$x = \arcsin \frac{1}{3} \qquad x = \pi - \arcsin \frac{1}{3}$$

Equazioni goniometriche

Esempio 1

Risolvere $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, con $x \in [0, 2\pi]$.

Risolvere $\sin x = \frac{1}{3}$, con $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Essendo $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, le uniche due soluzioni dell'equazione sono

$$x = \frac{\pi}{3} \qquad x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

- Essendo $\frac{1}{3}$ un valore non riconducibile ad un angolo noto, si useranno le funzioni inverse

$$x = \arcsin \frac{1}{3} \qquad x = \pi - \arcsin \frac{1}{3}$$

- L'unica soluzione accettabile, essendo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, è $x = \arcsin \frac{1}{3}$.

Esempio 2

Risolvere $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 2

Risolvere $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- L'equazione può essere riscritta nella forma

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Esempio 2

Risolvere $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- L'equazione può essere riscritta nella forma

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

- I punti sulla circonferenza goniometrica che hanno l'ascissa pari a $-\frac{1}{2}$ corrispondono agli angoli $\alpha = \pm\frac{2}{3}\pi$, da cui

$$\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \longrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)$$

Esempio 2

Risolvere $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- L'equazione può essere riscritta nella forma
$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$
- I punti sulla circonferenza goniometrica che hanno l'ascissa pari a $-\frac{1}{2}$ corrispondono agli angoli $\alpha = \pm\frac{2}{3}\pi$, da cui
$$\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \longrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)$$
- $$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Esempio 3

Risolvere $\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 3

Risolvere $\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- L'equazione può essere riscritta nella forma

$$(\tan x - 1)(\tan x - 2) = 0$$

da cui $\tan x = 1 \vee \tan x = 2$.

Esempio 3

Risolvere $\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- L'equazione può essere riscritta nella forma

$$(\tan x - 1)(\tan x - 2) = 0$$

da cui $\tan x = 1 \vee \tan x = 2$.

- Le soluzioni saranno pertanto

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \arctan 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Una disequazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica è detta **disequazione goniometrica**.

Disequazioni goniometriche

Una disequazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica è detta **disequazione goniometrica**.

- Valgono gli stessi criteri di classificazione delle equazioni goniometriche.

Disequazioni goniometriche

Una disequazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica è detta **disequazione goniometrica**.

- Valgono gli stessi criteri di classificazione delle equazioni goniometriche.
- Hanno in generale come soluzione degli intervalli del tipo $[\alpha, \beta]$ (con eventuale aggiunta di periodicità).

Disequazioni goniometriche

Una disequazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica è detta **disequazione goniometrica**.

- Valgono gli stessi criteri di classificazione delle equazioni goniometriche.
- Hanno in generale come soluzione degli intervalli del tipo $[\alpha, \beta]$ (con eventuale aggiunta di periodicità).
- Occorre sempre tenere conto del dominio rispetto al quale si risolvono le disequazioni.

Disequazioni goniometriche

Una disequazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica è detta **disequazione goniometrica**.

- Valgono gli stessi criteri di classificazione delle equazioni goniometriche.
- Hanno in generale come soluzione degli intervalli del tipo $[\alpha, \beta]$ (con eventuale aggiunta di periodicità).
- Occorre sempre tenere conto del dominio rispetto al quale si risolvono le disequazioni.
- Solitamente si risolvono con metodo grafico facendo uso
  - della circonferenza goniometrica.
  - dei grafici delle funzioni fondamentali.

Disequazioni goniometriche

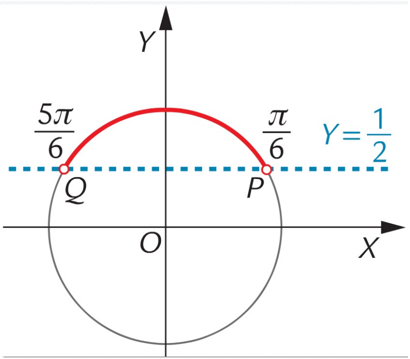
Una disequazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica è detta **disequazione goniometrica**.

- Valgono gli stessi criteri di classificazione delle equazioni goniometriche.
- Hanno in generale come soluzione degli intervalli del tipo $[\alpha, \beta]$ (con eventuale aggiunta di periodicità).
- Occorre sempre tenere conto del dominio rispetto al quale si risolvono le disequazioni.
- Solitamente si risolvono con metodo grafico facendo uso
  - della circonferenza goniometrica.
  - dei grafici delle funzioni fondamentali.
- Esempi:

$$\sin x > \frac{1}{2} \qquad 2\cos x + 1 \geq 0 \qquad \tan x - \sqrt{3} \leq 0$$

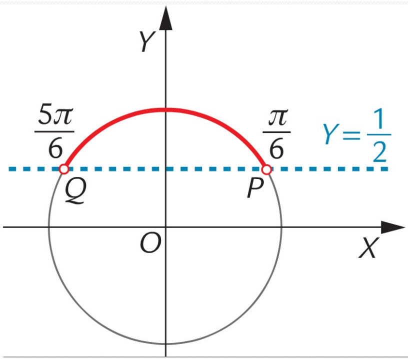
Esempio 1

Risolvere $\sin x > \frac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$.



Esempio 1

Risolvere $\sin x > \frac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$.

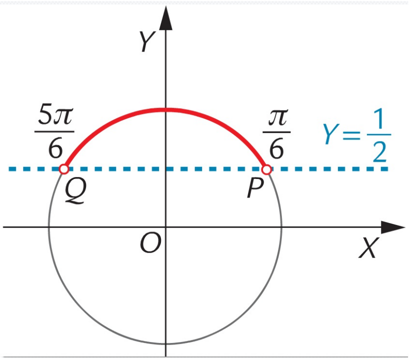


- Occorre dapprima individuare gli angoli che verificano l'equazione associata

$$x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5}{6}\pi$$

Esempio 1

Risolvere $\sin x > \dfrac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$.



- Occorre dapprima individuare gli angoli che verificano l'equazione associata

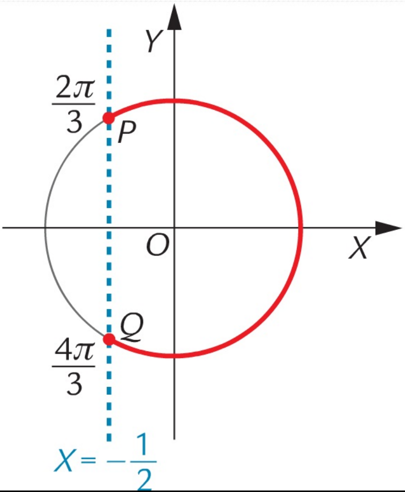
$$x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5}{6}\pi$$

- Si evidenzia la parte di circonferenza che verifica la disequazione, individuando la soluzione della disequazione

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$$

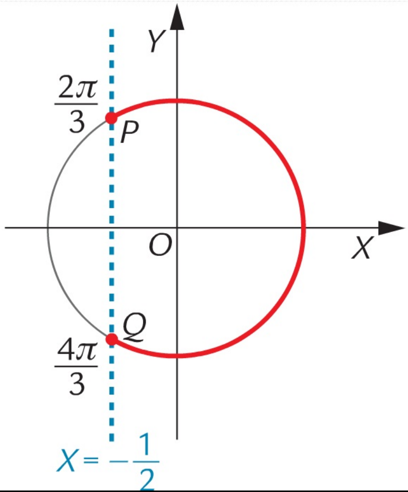
Esempio 2

Risolvere $2\cos x + 1 \geq 0$, $x \in [0, 2\pi]$.



Esempio 2

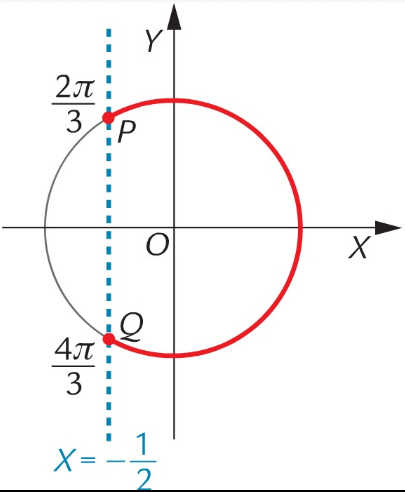
Risolvere $2\cos x + 1 \geq 0$, $x \in [0, 2\pi]$.



- La disequazione è equivalente a $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$

Esempio 2

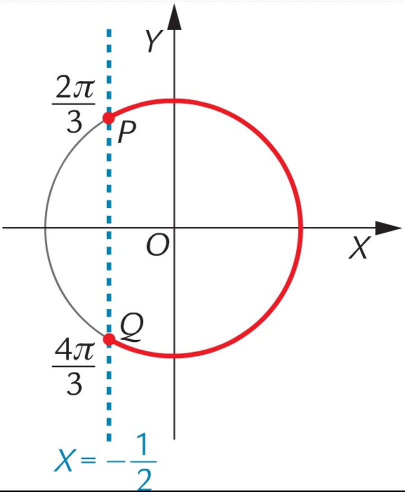
Risolvere $2\cos x + 1 \geq 0$, $x \in [0, 2\pi]$.



- La disequazione è equivalente a $\cos x \geq -\frac{1}{2}$
- Analogamente, l'equazione associata fornisce i valori $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi$

Esempio 2

Risolvere $2\cos x + 1 \geq 0$, $x \in [0, 2\pi]$.

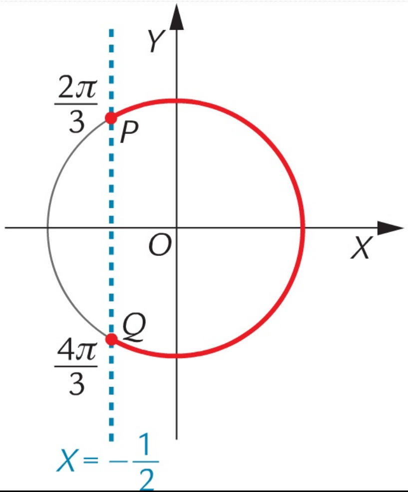


- La disequazione è equivalente a $\cos x \geq -\frac{1}{2}$
- Analogamente, l'equazione associata fornisce i valori $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi$
- La parte di circonferenza che verifica la disequazione è

$$0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \vee \frac{4}{3}\pi \leq x \leq 2\pi$$

Esempio 2

Risolvere $2\cos x + 1 \geq 0$, $x \in [0, 2\pi]$.



- La disequazione è equivalente a $\cos x \geq -\frac{1}{2}$
- Analogamente, l'equazione associata fornisce i valori $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi$
- La parte di circonferenza che verifica la disequazione è

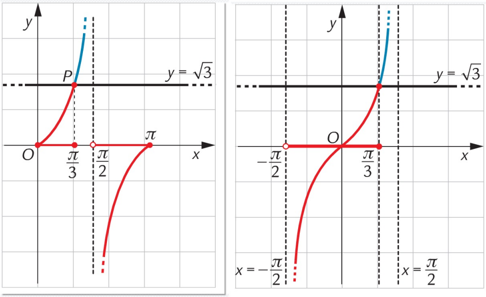
$$0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \vee \frac{4}{3}\pi \leq x \leq 2\pi$$

- Se $x \in [-\pi, \pi]$, la soluzione sarebbe

$$-\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$$

Esempio 3

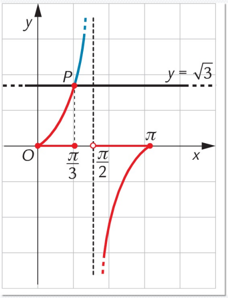
Risolvere $\tan x - \sqrt{3} \leq 0, x \in \mathbb{R}$.

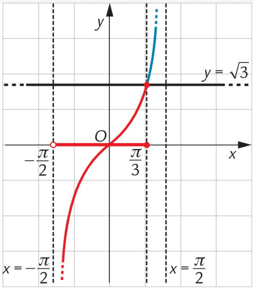


Due soluzioni equivalenti

Esempio 3

Risolvere $\tan x - \sqrt{3} \leq 0, x \in \mathbb{R}$.



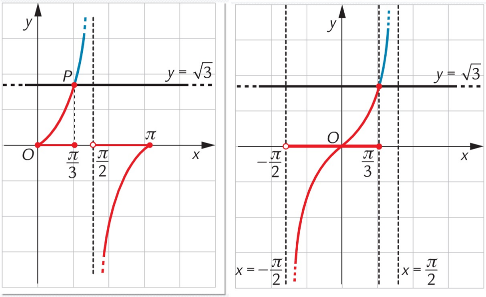


Due soluzioni equivalenti

- $k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \vee \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

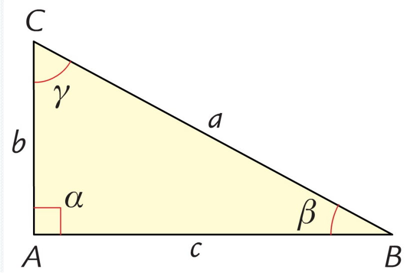
Esempio 3

Risolvere $\tan x - \sqrt{3} \leq 0, x \in \mathbb{R}$.

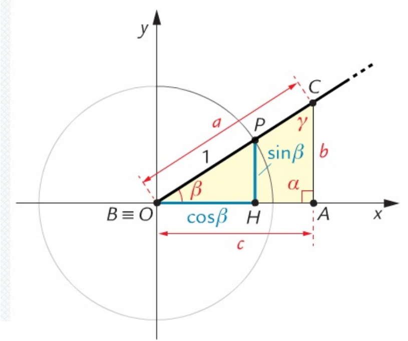


Due soluzioni equivalenti

- $k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{3} + k\pi \vee \dfrac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

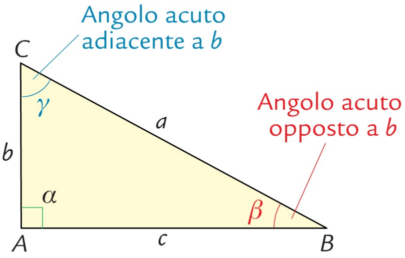


Convenzione per la nomenclatura di vertici, angoli e lati di un triangolo rettangolo.



Osservando la similitudine fra i triangoli rettangoli si ha

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{1} \qquad \frac{c}{a} = \frac{\cos\alpha}{1} \qquad \frac{b}{c} = \tan\alpha$$



In generale

$$\sin(\text{angolo}) = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos(\text{angolo}) = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}$$

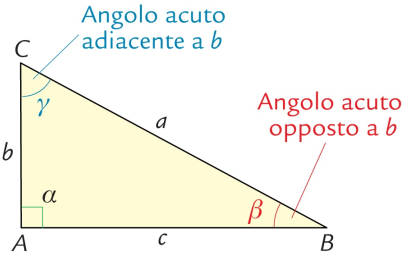
$$\tan(\text{angolo}) = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$$

Per la figura mostrata si ha quindi

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \qquad \cos\beta = \frac{c}{a} \qquad \tan\beta = \frac{b}{c}$$

$$\sin\gamma = \frac{c}{a} \qquad \cos\gamma = \frac{b}{a} \qquad \tan\gamma = \frac{c}{b}$$

Relazioni fra i triangoli rettangoli



Da

$$\sin\beta = \frac{b}{a} = \cos\gamma$$

si ricava

$$b = a\sin\beta = a\cos\gamma$$

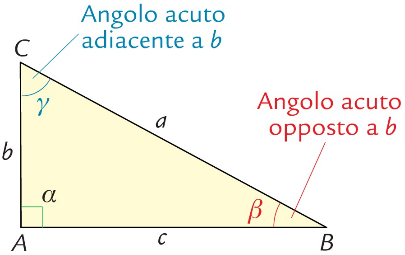
Primo teorema sui triangoli rettangoli

In ogni triangolo rettangolo, un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto, oppure al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente all'ipotenusa.

Analogamente si avrà

$$c = a\sin\gamma = a\cos\beta$$

Relazioni fra i triangoli rettangoli



Da

$$\tan\beta = \frac{b}{c} = \frac{1}{\tan\gamma} = \cot\gamma$$

si ricava

$$b = c\tan\beta = c\cot\gamma$$

Secondo teorema sui triangoli rettangoli

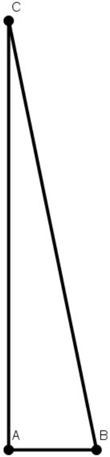
In ogni triangolo rettangolo, un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per tangente dell'angolo opposto al cateto (oppure per la cotangente dell'angolo adiacente al cateto).

Analogamente si avrà

$$c = b\tan\gamma = b\cot\beta$$

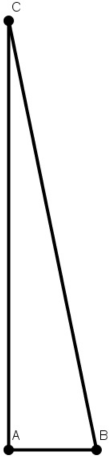
Esempio

Determina perimetro e area di un triangolo rettangolo ABC, avente ipotenusa BC di 10 cm e $\sin \hat{C} = \frac{1}{5}$.



Esempio

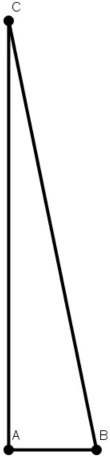
Determina perimetro e area di un triangolo rettangolo ABC, avente ipotenusa BC di 10 cm e $\sin \hat{C} = \frac{1}{5}$.



- Il cateto opposto al vertice C è AB, da cui $AB = BC \sin \hat{C} =$ 2 cm, mentre il cateto adiacente al vertice C è AC, da cui $AC = BC \cos \hat{C}$.

Esempio

Determina perimetro e area di un triangolo rettangolo ABC, avente ipotenusa BC di 10 cm e $\sin \hat{C} = \frac{1}{5}$.



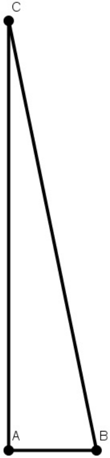
- Il cateto opposto al vertice C è AB, da cui $AB = BC \sin \hat{C} = 2$ cm, mentre il cateto adiacente al vertice C è AC, da cui $AC = BC \cos \hat{C}$.
- Dalla relazione fondamentale della goniometria si ha che

$$\cos \hat{C} = \sqrt{1 - \sin^2 \hat{C}} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$$

da cui $AC = 10 \cdot \frac{2}{5}\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$ cm.

Esempio

Determina perimetro e area di un triangolo rettangolo ABC, avente ipotenusa BC di 10 cm e $\sin\hat{C} = \frac{1}{5}$.



- Il cateto opposto al vertice C è AB, da cui $AB = BC \sin\hat{C} = 2$ cm, mentre il cateto adiacente al vertice C è AC, da cui $AC = BC\cos\hat{C}$.
- Dalla relazione fondamentale della goniometria si ha che
$$\cos\hat{C} = \sqrt{1-\sin^2\hat{C}} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$$
da cui $AC = 10 \cdot \frac{2}{5}\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$ cm.
- Il perimetro del triangolo è dato dalla somma dei lati ($10 + 2 + 4\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6}$ cm) mentre l'area è data da $\frac{1}{2}(2 \cdot 4\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}$ cm^2.