Il valore assoluto

prof. Andres Manzini

Università degli studi di Modena e Reggio Emilia
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria
Corso MOOC "Iscriversi a Ingegneria Reggio Emilia"

Introduzione

Definizione

Si definisce valore assoluto (o modulo) di un numero reale x, e si indica solitamente con $|x|$, il valore massimo fra x e l'opposto di x, ovvero

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Introduzione

Definizione

Si definisce valore assoluto (o modulo) di un numero reale x, e si indica solitamente con $|x|$, il valore massimo fra x e l'opposto di x, ovvero

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

- $|3| = 3$

Introduzione

Definizione

Si definisce valore assoluto (o modulo) di un numero reale x, e si indica solitamente con $|x|$, il valore massimo fra x e l'opposto di x, ovvero

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

- $|3| = 3$
- $|-5| = 5$

Introduzione

Definizione

Si definisce valore assoluto (o modulo) di un numero reale x, e si indica solitamente con $|x|$, il valore massimo fra x e l'opposto di x, ovvero

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

- $|3| = 3$
- $|-5| = 5$
- $|2-\sqrt{5}| \neq 2+\sqrt{5}$! Dalla definizione si ha

$$|2-\sqrt{5}| = \max\{2-\sqrt{5}; \sqrt{5}-2\} = \sqrt{5}-2$$

Proprietà del valore assoluto

- Il valore assoluto $|x|$ è definibile per ogni valore di x reale.
- $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0$ solo se $x = 0$
- $|x| = |-x|, \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = |y|$ se $x = y$ oppure $x = -y$
- $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Considerato poi un numero $n > 0$, valgono poi le proprietà

- $|x| = n \Leftrightarrow x = n \vee x = -n$
- $|x| < n \Leftrightarrow -n < x < n$
- $|x| > n \Leftrightarrow x < -n \vee x > n$

Proprietà del valore assoluto

Naturalmente le proprietà del valore assoluto si possono estendere a qualsiasi funzione quindi sarà

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0; \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

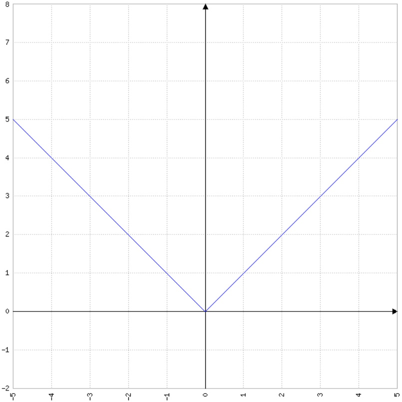
Esempio 1

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & \text{se } x \geq \frac{3}{2}; \\ 3-2x, & \text{se } x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Esempio 2

$|x^4+5| = x^4+5, \forall x \in \mathbb{R}$

La funzione valore assoluto: $f(x) = |x|$



- $D = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [0, +\infty)$
- $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$
- f è una funzione pari
- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Equazioni contenenti valori assoluti

$$|f(x)| = k, k \in \mathbb{R}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano le seguenti equazioni:

$$|2x^2 - 3x| = -3 \qquad |3x + 5| = 0 \qquad |x^2 - 4| = 2$$

$$|f(x)| = k, k \in \mathbb{R}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano le seguenti equazioni:

$$|2x^2 - 3x| = -3 \qquad |3x + 5| = 0 \qquad |x^2 - 4| = 2$$

- Dalla proprietà $|2x^2 - 3x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, segue subito che il valore assoluto non potrà mai essere uguale ad un numero negativo. Quindi l'insieme delle soluzione $S = \varnothing$.

Equazioni contenenti valori assoluti

$$|f(x)| = k, k \in \mathbb{R}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano le seguenti equazioni:

$$|2x^2 - 3x| = -3 \qquad |3x+5| = 0 \qquad |x^2 - 4| = 2$$

- Dalla proprietà $|2x^2 - 3x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, segue subito che il valore assoluto non potrà mai essere uguale ad un numero negativo. Quindi l'insieme delle soluzione $S = \varnothing$.
- Per la proprietà $|f(x)| = 0$ solo se $f(x) = 0$, l'equazione è equivalente a $3x + 5 = 0$, che ammette come soluzione $x = -\dfrac{5}{3}$.

Equazioni contenenti valori assoluti

$$|f(x)| = k, k \in \mathbb{R}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano le seguenti equazioni:

$$|2x^2 - 3x| = -3 \qquad |3x + 5| = 0 \qquad |x^2 - 4| = 2$$

- Dalla proprietà $|2x^2 - 3x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, segue subito che il valore assoluto non potrà mai essere uguale ad un numero negativo. Quindi l'insieme delle soluzione $S = \varnothing$.
- Per la proprietà $|f(x)| = 0$ solo se $f(x) = 0$, l'equazione è equivalente a $3x + 5 = 0$, che ammette come soluzione $x = -\dfrac{5}{3}$.
- L'equazione è equivalente a $x^2 - 4 = 2 \vee x^2 - 4 = -2$, quindi l'insieme delle soluzioni è $S = \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{6}\}$.

Equazioni contenenti valori assoluti

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano l'equazione:

$$2x - |x - 5| = 3$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano l'equazione:

$$2x - |x - 5| = 3$$

- In questo caso l'equazione è equivalente a

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ 2x - x + 5 = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 5 \\ 2x + x - 5 = 3 \end{cases}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano l'equazione:

$$2x - |x - 5| = 3$$

- In questo caso l'equazione è equivalente a

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ 2x - x + 5 = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 5 \\ 2x + x - 5 = 3 \end{cases}$$

- L'unica soluzione accettabile è $x = \dfrac{8}{3}$.

Disquazioni contenenti valori assoluti

$$|f(x)| \leq k, k \in \mathbb{R}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano le seguenti disequazioni:

$$|2x^2 - 3x| \leq -3 \qquad |3x + 5| \leq 0 \qquad |x^3 - 4| \leq 2$$

$$|f(x)| \leq k, k \in \mathbb{R}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano le seguenti disequazioni:

$$|2x^2 - 3x| \leq -3 \qquad |3x + 5| \leq 0 \qquad |x^3 - 4| \leq 2$$

- Dalla proprietà $|2x^2 - 3x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, segue subito che il valore assoluto non potrà mai essere minore o uguale ad un numero negativo. Quindi l'insieme delle soluzione $S = \varnothing$.

Disquazioni contenenti valori assoluti

$$|f(x)| \leq k, k \in \mathbb{R}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano le seguenti disequazioni:

$$|2x^2 - 3x| \leq -3 \qquad |3x + 5| \leq 0 \qquad |x^3 - 4| \leq 2$$

- Dalla proprietà $|2x^2 - 3x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, segue subito che il valore assoluto non potrà mai essere minore o uguale ad un numero negativo. Quindi l'insieme delle soluzione $S = \varnothing$.
- La disequazione è equivalente a $3x + 5 = 0$, che ammette come soluzione $x = -\dfrac{5}{3}$.

$$|f(x)| \leq k, k \in \mathbb{R}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano le seguenti disequazioni:

$$|2x^2 - 3x| \leq -3 \qquad |3x+5| \leq 0 \qquad |x^3 - 4| \leq 2$$

- Dalla proprietà $|2x^2 - 3x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, segue subito che il valore assoluto non potrà mai essere minore o uguale ad un numero negativo. Quindi l'insieme delle soluzione $S = \varnothing$.
- La disequazione è equivalente a $3x + 5 = 0$, che ammette come soluzione $x = -\dfrac{5}{3}$.
- La disequazione è equivalente a $-2 \leq x^3 - 4 \leq 2$, ovvero $2 \leq x^3 \leq 6$ quindi l'insieme delle soluzioni è l'intervallo $S : [\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{6}]$.

$$|f(x)| \geq k, k \in \mathbb{R}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano le seguenti disequazioni:

$$|3x^2 - 3x + 5| \geq -\frac{3}{4} \qquad |3x - 4| \geq 1$$

Disquazioni contenenti valori assoluti

$$|f(x)| \geq k, k \in \mathbb{R}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano le seguenti disequazioni:

$$|3x^2 - 3x + 5| \geq -\frac{3}{4} \qquad |3x - 4| \geq 1$$

- Dalla proprietà $|f(x)| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ segue subito che il valore assoluto sarà sempre maggiore o uguale ad un numero negativo. Quindi l'insieme delle soluzione $S = \mathbb{R}$.

Disquazioni contenenti valori assoluti

$$|f(x)| \geq k, k \in \mathbb{R}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano le seguenti disequazioni:

$$|3x^2 - 3x + 5| \geq -\frac{3}{4} \qquad |3x - 4| \geq 1$$

- Dalla proprietà $|f(x)| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ segue subito che il valore assoluto sarà sempre maggiore o uguale ad un numero negativo. Quindi l'insieme delle soluzione $S = \mathbb{R}$.
- La disequazione è equivalente a $3x - 4 \leq -1 \vee 3x - 4 \geq 1$, che ammette come soluzione $S : (-\infty, 1] \cup [\frac{5}{3}, +\infty)$.

Disquazioni contenenti valori assoluti

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano la disequazione:

$$|1 - 2x| + x < 8$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano la disequazione:

$$|1-2x|+x<8$$

- In questo caso la disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} 1-2x\geq 0 \\ 1-2x+x<8 \end{cases} \cup \begin{cases} 1-2x<0 \\ 2x-1+x<8 \end{cases}$$

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano la disequazione:

$$|1-2x|+x<8$$

- In questo caso la disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 1-2x+x<8 \end{cases} \cup \begin{cases} 1-2x<0 \\ 2x-1+x<8 \end{cases}$$

-
$$\begin{cases} x \leq \dfrac{1}{2} \\ x>-7 \end{cases} \cup \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ x<3 \end{cases}$$

Disquazioni contenenti valori assoluti

Esercizio

Trovare i valori reali di x che soddisfano la disequazione:

$$|1-2x|+x<8$$

- In questo caso la disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 1-2x+x<8 \end{cases} \cup \begin{cases} 1-2x<0 \\ 2x-1+x<8 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x \leq \dfrac{1}{2} \\ x>-7 \end{cases} \cup \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ x<3 \end{cases}$$

- L'insieme delle soluzioni è dato dall'intervallo $(-7,3)$.