Funzioni e grafici

prof. Andres Manzini

Università degli studi di Modena e Reggio Emilia
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria
Corso MOOC "Iscriversi a Ingegneria Reggio Emilia"

Introduzione

Definizione

Si dice funzione (o applicazione) ogni legge tra 2 insiemi A e B tale che *ad ogni* elemento dell'insieme A fa corrispondere *uno e un solo* elemento del secondo insieme B.

A è detto Dominio della funzione f;
B è detto Codominio della funzione f.
Notazioni per la funzione f:

$$f : A \longrightarrow B \quad A \xrightarrow{f} B$$

Presi gli elementi $a \in A$ e $b \in B$, allora f è una funzione se

$$\forall a \in A \exists! b \in B : b = f(a)$$

Nella scrittura

$$b = f(a)$$

- a è la variabile indipendente
- b è la variabile dipendente
- $b = f(a)$ si può dire *immagine* di a oppure *trasformato* di a attraverso f oppure *valore* di f in a.
- un valore $a : f(a) = b$ si dice *controimmagine* di b oppure *antitrasformato* di b.

Altri modi per esprimere la funzione f sono

$$b = f(a) \quad f : a \longrightarrow f(a)$$

Funzioni: esempi

- Dato l'insieme A composto dagli studenti di una scuola e l'insieme B delle classi di una scuola, la corrispondenza che associa ad ogni studente la sua classe è una funzione.
- Dato l'insieme A composto dai docenti di una scuola e l'insieme B delle materie insegnate in una scuola, la corrispondenza che associa ad ogni professore la materia insegnata NON è una funzione.
- Dato $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{R}$, definisco la funzione $f : A \longrightarrow B$ tale che $a \longrightarrow 2a + 3$. Per tale funzione varrà, ad esempio, $1 \longrightarrow 5$, cioè $f(1) = 5$.
  N.B. $f(\frac{1}{2})$ non è 4, perché $\frac{1}{2} \notin A$ quindi $f(\frac{1}{2})$ non esiste!
- Dato $A = \mathbb{R}^3$ e $B = \mathbb{R}^2$, posso definire la funzione

$$(x, y, z) \xrightarrow{f} (2x - 3z, y^2 - 2x + 2z)$$

Nello studio dell'analisi matematica solitamente si attribuisce alla variabile indipendente il simbolo x, mentre alla variabile dipendente il simbolo y. Quindi solitamente una funzione è individuata da

$$y = f(x)$$

e siccome solitamente gli insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si dice che $y = f(x)$ è una funzione *reale* di una variabile *reale*.
Le scritture e i simboli sono comunque convenzionali, e occorre saperli interpretare. Così scrivere

$$f(x) = x^2 + 3x$$

significa che $\forall x \in A$ associo $y \in B : y = x^2 + 3x$. Sarà quindi

$f(5) = 5^2+3\cdot5 = 40$ $\quad f(k) = k^2+3k$ $\quad f(2x+3) = (2x+3)^2+3(2x+3)$

Dominio di una funzione

Nella seguente presentazione, le funzioni trattate sono di una variabile reale (x) a valori reali (y), quindi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e, *se non diversamente specificato*, l'insieme A (detto dominio della funzione) è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove f ha significato, mentre $B \equiv \mathbb{R}$. L'insieme $f(A)$ (trasformato del dominio di f) viene detto Immagine di f e si indica con $Im(f)$. In generale quindi $Im(f) \neq B$ (le funzioni in cui $Im(f) \equiv B$ si dicono *suriettive*).

- Le funzioni razionali intere hanno come dominio (spesso indicato con la lettera D) $\mathbb{R}$.
- Nelle funzioni razionali fratte non appartengono al dominio i valori che rendono nullo il denominatore.
  Esempio: per la funzione
  $$f(x) = \frac{2x^3 - 4x + 5}{x^2 - x}$$
  occorre porre
  $$x^2 - x \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 1 \rightarrow D = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Dominio di una funzione

- Le funzioni irrazionali (con indice di radice pari) hanno come dominio l'insieme dei valori che rendono il radicando non negativo). Le funzioni irrazionali (con indice di radice dispari) hanno come dominio $\mathbb{R}$.
  Esempio: per la funzione
  $$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$
  occorre porre
  $$x^2 - 2x - 3 \geq 0 \rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 3 \rightarrow D = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$
  mentre la funzione $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 2x - 3}$ ha come dominio $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Dominio di una funzione

- Le funzioni esponenziali e le funzioni goniometriche seno e coseno hanno come dominio $\mathbb{R}$.
- Le funzioni logaritmiche hanno come dominio l'insieme dei valori che rendono l'argomento del logaritmo positivo, e la base del logaritmo positiva e diversa da 1.
- La funzione $f(x) = \tan x$ ha come dominio $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}_0 \right\}$.
- Le funzioni goniometriche inverse $f(x) = \arcsin x$ e $f(x) = \arccos x$ hanno come dominio l'insieme $[-1, 1]$, mentre la funzione $f(x) = \arctan x$ ha come dominio $\mathbb{R}$.
- Nelle funzioni del tipo $f(x) = A(x)^{B(x)}$ occorre porre la condizione $A(x) > 0$.

Grafico di una funzione

Il grafico di una funzione ($\mathcal{G}_f$)è in generale un sottoinsieme del piano cartesiano $\mathbb{R}$

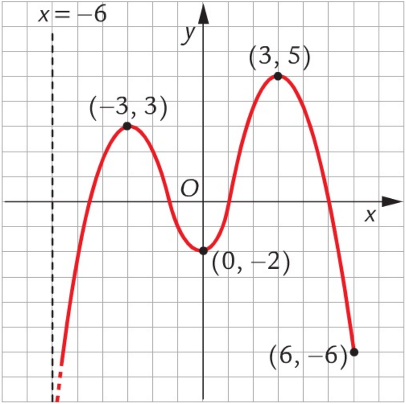
$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

Il grafico è formato da tutte quelle coppie ordinate tali per cui la seconda componente è l'immagine della prima componente attraverso la funzione f.
Esempio: data

$$f(x) = x^2 + 5x$$

essendo $f(1) = 6$, allora il punto $(1, 6) \in \mathcal{G}_f$.
Viceversa, conoscere il grafico di una funzione consente di ottenere molte informazioni sulla funzione stessa.

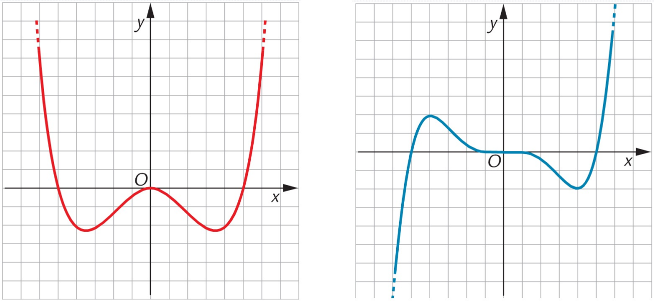
Grafico di una funzione



- Dominio di f
- $Im(f)$
- Immagine di un punto
- Controimmagine di un punto
- Segno della funzione

Si consideri la funzione $f(x)$ e sia $D \subseteq \mathbb{R}$ il suo dominio. Allora

- f si dice funzione pari se, per ogni $x \in D$ vale $f(-x) = f(x)$. Geometricamente il grafico di una funzione pari presenta una simmetria rispetto all'asse delle ordinate.
- f si dice funzione dispari se, per ogni $x \in D$ vale $f(-x) = -f(x)$. Geometricamente il grafico di una funzione pari presenta una simmetria rispetto all'origine degli assi.



Funzioni inverse

Si consideri la funzione f e sia $D \subseteq \mathbb{R}$ il suo dominio. Se succede che per ogni immagine $y \in f(D)$ esiste un solo valore di $x \in D$ tale che $f(x) = y$ allora la funzione f si dice invertibile. In particolare, data

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow y = f(x)$$

con le caratteristiche descritte sopra, potrò definire

$$f^{-1} : f(D) \longrightarrow D, y \longrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Esempio: la funzione $f(x) = 5x + 2$ è invertibile e l'equazione $5x + 2 = y$ da l'espressione per la funzione inversa

$$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{5}$$

Geometricamente il grafico della funzione inversa $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ è ottenibile a partire dal grafico $\mathcal{G}_f$ mediante una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Esempi

Esercizio

Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$, determinare il suo dominio, l'immagine e le eventuali controimmagini di 1 e verificare se la funzione è pari o dispari

Esempi

Esercizio

Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$, determinare il suo dominio, l'immagine e le eventuali controimmagini di 1 e verificare se la funzione è pari o dispari

- Essendo una funzione razionale fratta, occorre porre $2x \neq 0 \to x \neq 0$. Per cui

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Esempi

Esercizio

Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$, determinare il suo dominio, l'immagine e le eventuali controimmagini di 1 e verificare se la funzione è pari o dispari

- Essendo una funzione razionale fratta, occorre porre $2x \neq 0 \rightarrow x \neq 0$. Per cui

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

- l'immagine di 1, ovvero $f(1)$ si ottiene sostituendo il valore $x = 1$ nella funzione per cui

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{2 \cdot 1} = 0$$

Esercizio

Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$, determinare il suo dominio, l'immagine e le eventuali controimmagini di 1 e verificare se la funzione è pari o dispari

- Le eventuali controimmagini di 1, ovvero $f^{-1}(1)$ si possono ricavare risolvendo l'equazione $f(x) = 1$, ovvero

$$\frac{x^2 - 1}{2x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Esempi

Esercizio

Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$, determinare il suo dominio, l'immagine e le eventuali controimmagini di 1 e verificare se la funzione è pari o dispari

- Le eventuali controimmagini di 1, ovvero $f^{-1}(1)$ si possono ricavare risolvendo l'equazione $f(x) = 1$, ovvero

$$\frac{x^2 - 1}{2x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

- Per valutare le eventuali simmetrie occorre calcolare $f(-x)$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{2(-x)} = -\frac{x^2 - 1}{2x} = -f(x)$$

quindi f è dispari.

Esempi

Esercizio

Data la funzione $f(x) = 2 - \log_5(x^3 - 1)$, ricavare le espressioni di $f(2x)$, di $f(x^2)$ e della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$

Esempi

Esercizio

Data la funzione $f(x) = 2 - \log_5\left(x^3 - 1\right)$, ricavare le espressioni di $f(2x)$, di $f(x^2)$ e della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$

- $f(2x) = 2 - \log_5\left((2x)^3 - 1\right) = 2 - \log_5\left(8x^3 - 1\right)$

Esempi

Esercizio

Data la funzione $f(x) = 2 - \log_5(x^3 - 1)$, ricavare le espressioni di $f(2x)$, di $f(x^2)$ e della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$

- $f(2x) = 2 - \log_5((2x)^3 - 1) = 2 - \log_5(8x^3 - 1)$
- $f(x^2) = 2 - \log_5((x^2)^3 - 1) = 2 - \log_5(x^6 - 1)$

Esempi

Esercizio

Data la funzione $f(x) = 2 - \log_5(x^3 - 1)$, ricavare le espressioni di $f(2x)$, di $f(x^2)$ e della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$

- $f(2x) = 2 - \log_5((2x)^3 - 1) = 2 - \log_5(8x^3 - 1)$
- $f(x^2) = 2 - \log_5((x^2)^3 - 1) = 2 - \log_5(x^6 - 1)$
- ponendo $2 - \log_5(x^3 - 1) = y$ si ha rispettivamente

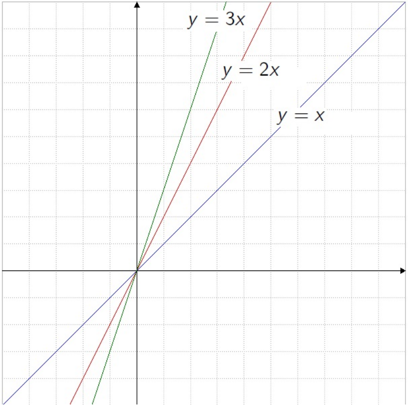
$$\log_5(x^3 - 1) = 2 - y \Leftrightarrow x^3 + 1 = 5^{2-y}$$

da cui

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{5^{2-y} - 1}$$

Funzione potenza: $f(x) = k \cdot x^{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$

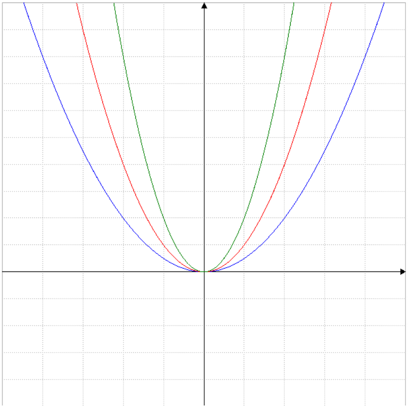
Caso $\alpha = 1$. $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$



- Il grafico di f è rappresentato da una retta passante per l'origine
- $D = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}$
- funzione invertibile
- k è detto coefficiente angolare

Grafici di funzione

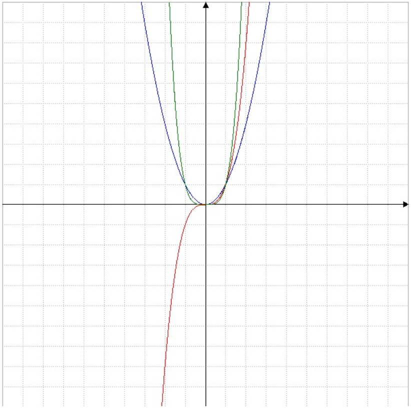
Funzione potenza: $f(x) = k \cdot x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$
Caso $\alpha = 2$. $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$



- Il grafico di f è rappresentato da una parabola avente vertice nell'origine e concavità rivolta verso l'alto (il basso) se $k > 0$ ($k < 0$).
- $D = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}^+$
- La funzione è pari e non è invertibile, a meno di considerarne una restrizione a $x \geq 0$.

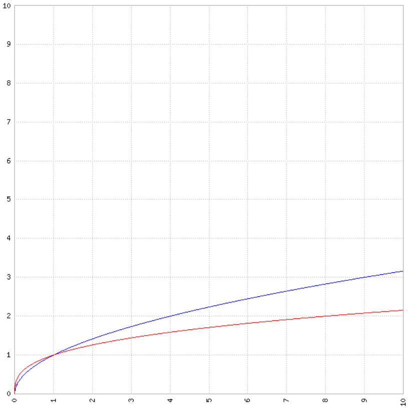
Funzione potenza: $f(x) = k \cdot x^{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$

Confronto fra funzioni potenza. $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$



- $f(x)$ è pari se n è pari, mentre è dispari se n è dispari.
- $Im(f) = \mathbb{R}^+$ se n è pari, mentre $Im(f) = \mathbb{R}$ se n è dispari.
- Le funzioni pari non sono invertibili, a meno di considerarne una restrizione a $x \geq 0$, mentre quelle dispari sono invertibili, in quanto funzioni biunivoche.

Funzione radice: $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$



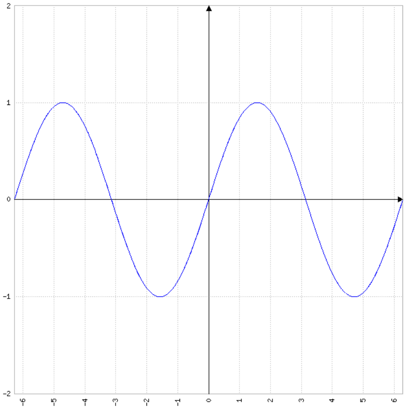
$f(x) = \sqrt{x}$

- $D = Im(f) = \mathbb{R}^+$
- f è una funzione crescente, ovvero $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ comunque presi $x_1, x_2 \in D$.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

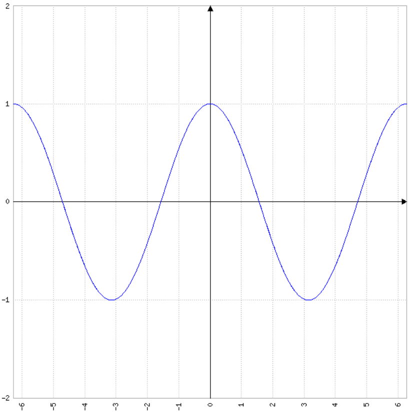
- $D = Im(f) = \mathbb{R}$
- f è una funzione crescente, ovvero $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2}$ comunque presi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Funzioni goniometriche: $f(x) = \sin x$



- $D = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [-1, 1]$
- La funzione è periodica con periodo 2π, ovvero $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = 0$ per $x = k\pi$, mentre assume valore massimo (pari a 1) per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$)
- f è una funzione dispari, ovvero $\sin(-x) = -\sin x$

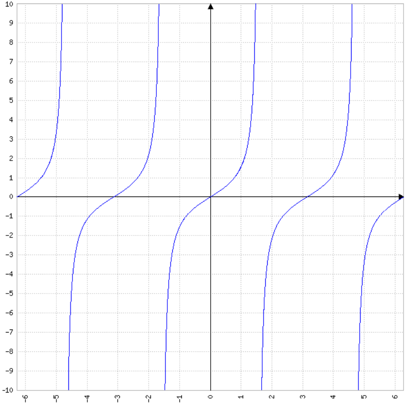
Funzioni goniometriche: $f(x) = \cos x$



- $D = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [-1, 1]$
- La funzione è periodica con periodo 2π, ovvero $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = 0$ per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, mentre assume valore massimo (pari a 1) per $x = 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$)
- f è una funzione pari, ovvero $\cos(-x) = \cos x$

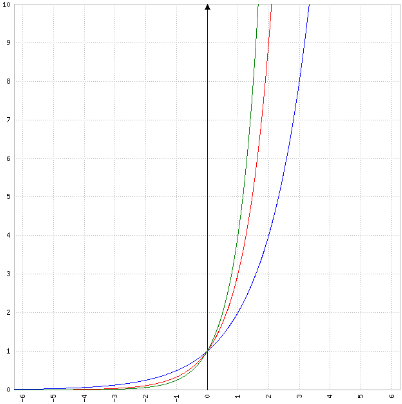
Grafici di funzione

Funzioni goniometriche: $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$



- $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- $Im(f) = \mathbb{R}$
- La funzione è periodica con periodo π, ovvero $\tan x = \tan(x + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x = 0$ per $x = k\pi$
- f è una funzione dispari, ovvero $\tan(-x) = -\tan x$

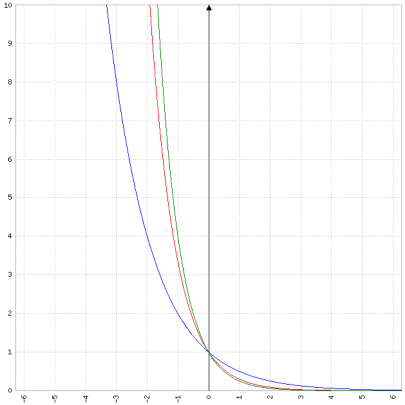
La funzione esponenziale: $f(x) = a^x$, con $a > 0$
Caso $a > 1$. Esempio: $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$



- $D = \mathbb{R}$.
- $Im(f) = (0, +\infty)$
- La funzione è crescente, ovvero se $a > 1$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, comunque presi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
- Dal confronto fra grafici si deduce anche che, prese due basi $a > b > 0$, si ha $a^x > b^x$, per $x > 0$, $a^x < b^x$, per $x < 0$, mentre $a^x = b^x = 1$, per $x = 0$

La funzione esponenziale: $f(x) = a^x$, con $a > 0$

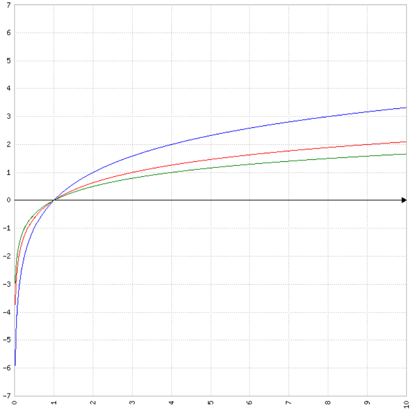
Caso $0 < a < 1$. Esempio: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$



- $D = \mathbb{R}$.
- $Im(f) = (0, +\infty)$
- La funzione è decrescente, ovvero se $0 < a < 1$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$, comunque presi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
- Dal confronto fra grafici si deduce anche che, prese due basi $a > b > 0$, si ha $a^x > b^x$, per $x > 0$, $a^x < b^x$, per $x < 0$, mentre $a^x = b^x = 1$, per $x = 0$

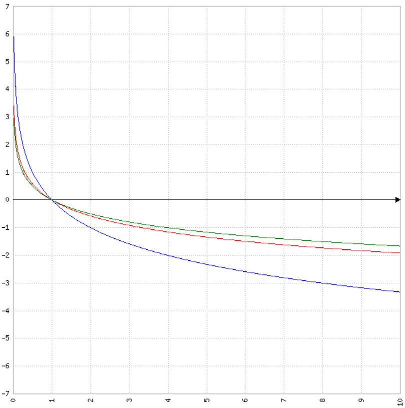
Grafici di funzione

La funzione logaritmica: $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0, a \neq 1$
Caso $a > 1$. Esempio: $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_4 x$



- $D = (0, +\infty)$, $Im(f) = \mathbb{R}$
- La funzione è crescente, ovvero se $a > 1$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$, comunque presi $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$.
- Dal confronto fra grafici si deduce anche che, prese due basi $a > b > 0$, si ha $\log_a x > \log_b x$, per $x \in (0, 1)$, $\log_a x < \log_b x$, per $x > 1$, mentre $\log_a x = \log_b x = 0$, per $x = 1$

La funzione logaritmica: $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0, a \neq 1$
Caso $0 < a < 1$. Esempio: $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \log_{\frac{1}{4}} x$



- $D = (0, +\infty)$, $Im(f) = \mathbb{R}$
- La funzione è decrescente, ovvero se $0 < a < 1$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$, comunque presi $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$.
- Dal confronto fra grafici si deduce anche che, prese due basi $a > b > 0$, si ha $\log_a x > \log_b x$, per $x \in (0, 1)$, $\log_a x < \log_b x$, per $x > 1$, mentre $\log_a x = \log_b x = 0$, per $x = 1$

Alcune considerazioni generali

- Il Dominio fornisce i valori (di x) per cui **esiste** una funzione
- L'immagine di f fornisce i valori (di y) che la funzione può **assumere**.
  Esempio: $f(x) = 5^x$ è una funzione che **esiste** per qualsiasi valore reale e **assume** solo valori positivi
- Funzione potenza x^n: $f(1) = 1$ (Essendo $1^n = 1$ con n intero)
- Funzione esponenziale a^x: $f(0) = 1$ (Essendo $a^0 = 1, \forall a > 0$)
- Funzione logaritmica $log_a x$: $f(1) = 0$ (Essendo $log_a 1 = 0, \forall a > 0, a \neq 1$)